# ЛЕКЦИЯ 5 ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

## §1. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве. Геометрический смысл уравнений

В аналитической геометрии всякую поверхность рассматривают как совокупность точек, обладающих некоторым свойством. Обозначая через x, y, z, координаты произвольной (текущей) точки данной поверхности, всегда можно, используя свойства точек этой поверхности, составить уравнение вида

$$F(x,y,z) = 0.$$

Пример 1. Найти уравнение сферы, центр которой лежит в точке $C_0(x_0,y_0,z_0)$, а радиус равен R.

Решение: обозначив через x, y, z координаты произвольной точки M сферы, выразим аналитически свойство, общее всем точкам сферы. Из определения сферы следует, что расстояние точки M до центра C есть величина постоянная, равная радиусу R, т.е. CM=R, или

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим уравнение сферы в виде

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \tag{1.1}$$

Таким образом, всякая поверхность, рассматриваемая как геометрическое место точек, может быть представлена уравнением между координатами ее точек. Обратно, всякое уравнение между переменными x, y, z, вообще говоря, определяет поверхность как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Из вышеизложенного вытекает постановка двух основных задач:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Составить уравнение этой поверхности.
2. Дано уравнение между координатами x, y, z. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Сфера. Заметим, что сфера радиуса R с центром в точке $C(x_0,y_0,z_0)$ имеет уравнение (1.1). раскрывая скобки, придадим уравнению (1.1) вид

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)=0 \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) содержит члены второго измерения, первого измерения и свободный член. Такое уравнение является уравнением второй степени. Итак, сфере соответствует уравнение второй степени относительно текущих точек. Но не всякое уравнение второй степени определяет сферу. Действительно, из уравнения (1.2) видим, что в уравнении сферы коэффициенты при квадратах координат равны, а члены с произведениями координат (xy, xz, yz) отсутствуют. Обратно, если в уравнении второй степени относительно текущих координат x, y, z коэффициенты при $x^2$ ,$y^2$ ,$z^2$

равны и отсутствуют члены xy, xz, yz, то такое уравнение определяет сферу, так как оно приводится к виду (1.2) путем деления на коэффициент при $x^2$.
Например, уравнение

$$x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z-7=0$$

определяет сферу. Желая узнать радиус сферы положение ее в пространстве относительно данной системы координат, мы должны данное уравнение привести к виду (1.1). Для этого члены, содержащие x, т.е. $x^2-4x$, дополним до полного квадрата разности x-2. Получим:

$$x^2-4x=(x-2)^2-4$$

Аналогично поступая с членами, содержащими y и z, получим:

$$y^2+6y=(y+3)^2-9,\quad z^2-8z=(z-4)^2-16$$

После этого данное уравнение запишется так:

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=36$$

сравнивая это уравнение с уравнением (1.1), видим, что приведенное уравнение определяет сферу с центром в точке C(2,-3,4) и радиусом R=6.

## §2.Плоскость в пространстве.

Положение плоскости как геометрического места точек будет определено, если зададим ее расстояние p от начала координат и единичный вектор $\overline{n^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, выпущенный из начала координат в сторону плоскости (рис. 9).

Когда точка M(x,y,z) движется по плоскости, ее радиус-вектор $\overline{OM}=\{x,y,z\}$ удовлетворяет условию:

$$пр_{\overline{n^0}}\overline{OM}=P \tag{2.1}$$

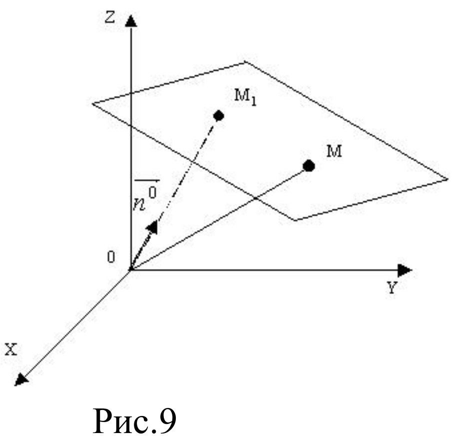

Рис.9

Это условие имеет место только для точек плоскости, и, оно нарушается, если точка M не принадлежит плоскости. Таким образом, равенство (2.1) выражает свойство, общее всем точкам плоскости и только им.
Уравнение (2.1) плоскости записано в векторной форме. Переходя к координатам, получим:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-P=0 \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется нормальным уравнением плоскости в координатной форме.

Положение плоскости также определяется точкой $M(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащей плоскости, и вектором $\vec{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярным к ней (рис. 10).

Возьмем на данной плоскости произвольную точку M(x,y,z) и построим вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Вектор $\overline{M_0M}$, как лежащий в плоскости, будет ортогонален вектору $\vec{n}$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

Это равенство справедливо для всех точек плоскости и нарушится, как только точка M окажется вне плоскости, поэтому оно является уравнением данной плоскости.

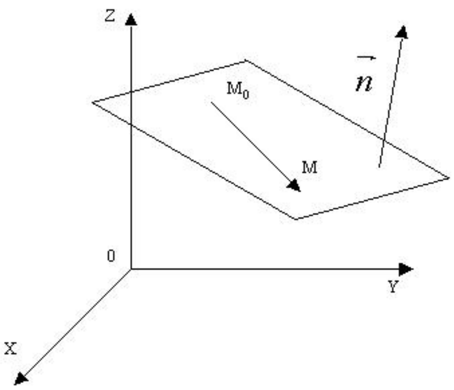


Рис.10

Выражая скалярное произведение векторов через их проекции, получим уравнение той же плоскости в координатной форме:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2) и (2.3) позволяют утверждать, что всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени. Имеет место и обратное утверждение: всякое уравнение первой степени (линейное) с тремя переменными

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2.4}$$

определяет плоскость, причем коэффициенты A, B, C являются координатами вектора, перпендикулярного к плоскости, определяемой уравнением (2.4).

Пусть даны уравнения плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Угол $\varphi$ между двумя плоскостями (рис. 11) равен углу между векторами, перпендикулярными к этим плоскостям, либо дополняет

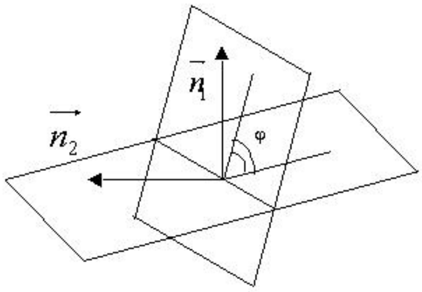


Рис.11

этот угол до $180^0$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2.5)$$

В случае перпендикулярности двух плоскостей $\cos\varphi = 0$, следовательно,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (2.6)$$

Если плоскости параллельны, то вектор $\vec{n}_1$ параллелен вектору $\vec{n}_2$, следовательно,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (2.7)$$

## §3. Прямая в пространстве

Положение прямой линии будет определено, если зададим на прямой точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектор $\vec{s} = \{m, n, p\}$, которому прямая параллельна (рис. 12).

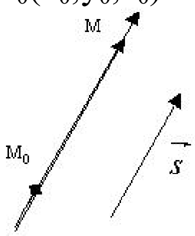


Рис.12

Вектор $\bar{s}$ называется направляющим вектором прямой. Текущей точке *M(x,y,z)* прямой линии соответствует вектор $\overline{M_0M}$, который коллинеарен вектору $\bar{s}$, и поэтому

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (3.1)$$

Уравнения (3.1) называются каноническими уравнениями прямой линии. Из канонических уравнений (3.1) прямой, вводя параметр *t*, нетрудно получить параметрические уравнения прямой линии

$$x = x_0 + mt \quad y = y_0 + nt \quad z = z_0 + pt \qquad (3.2)$$

Через каждую прямую проходит бесчисленное множество плоскостей. Любые две из них, пересекаясь, определяют ее в пространстве.

Следовательно, уравнения любых двух таких плоскостей, рассматриваемые совместно, определяют собой уравнения этой прямой.
Вообще всякие две непараллельные плоскости с общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

определяют прямую их пересечения.
Уравнения (3.3), рассматриваемые совместно, называются общими уравнениями прямой. От общих уравнений прямой можно перейти к ее каноническим уравнениям. Для этой цели мы должны знать какую-нибудь точку прямой и направляющий вектор. Координаты точки найдем из данной системы уравнений, выбирая одну из координат произвольно и решая после этого систему двух уравнений относительно двух оставшихся координат.
Для определения направляющего вектора прямой заметим, что этот вектор, направленный по линии пересечения плоскостей, должен быть перпендикулярен к обоим нормальным векторам

$$\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\} \text{ и } \overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

этих плоскостей.

Обратно, всякий вектор, перпендикулярный к $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$, параллелен обеим плоскостям, а, следовательно, и данной прямой.

Но векторное произведение $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$ также обладает этим свойством. Поэтому за направляющий вектор прямой можно принять векторное произведение нормальных векторов данных плоскостей.
Пример 14. Привести к каноническому виду прямой уравнения

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0 \\ 3x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Выберем произвольно одну из координат. Пусть, например, $z=-10$. Тогда

$$\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ 3x + y = -16 \end{cases}$$

откуда $x=-3$, $y=-7$. Итак, мы нашли точку (-3;-7;-10), лежащую на прямой. Находя теперь векторное произведение векторов {2;-3;1} и {3;1;-2}, получаем направляющий вектор прямой {5;7;11}. Поэтому канонические уравнения прямой будут

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y+7}{7} = \frac{z+10}{11}$$

Углом между прямыми в пространстве будем называть острый угол, образованный двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным прямым.
Пусть уравнения двух прямых суть:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Очевидно, за угол $\varphi$ между ними можно принять угол между их направляющими векторами $(m_1, n_1, p_1)$ и $(m_2, n_2, p_2)$ или угол, дополняющий его до $180^0$. Поэтому по формуле (1.15) имеем

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (3.4)$$

Пусть нужно найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$. Будем искать эти уравнения в канонической форме.

Для решения задачи достаточно знать координаты одной из точек, лежащих на этой прямой, и направляющий вектор. За такую точку возьмем точку $A$. За направляющий вектор прямой примем вектор $\overrightarrow{AB}$. Проекциями его на координатные оси будут:

$$x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1$$

Уравнения искомой прямой примут вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3.5)$$

## §4.Прямая и плоскость в пространстве

Пусть уравнение прямой суть:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

а уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D\neq 0.$$

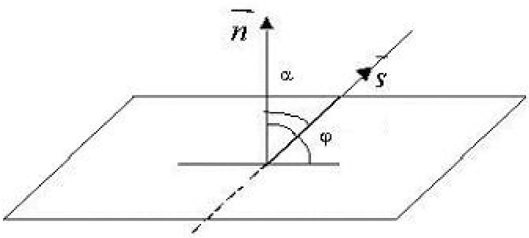


Рис.13

Углом $\varphi$ между прямой и плоскостью (рис. 13) будем называть острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Угол $\frac{\pi}{2}\pm\varphi$ будет, как видно на рис. 13, углом между векторами $\vec{n}=(A,B,C)$ и $\vec{s}=(m,n,p)$, заметив, что $\cos(\frac{\pi}{2}\pm\varphi)=\pm\sin\varphi$, получим окончательно:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (4.1)$$

В случае параллельности прямой линии

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

угол между ними равен нулю и формула (4.1) дает искомое условие

$$An+Bm+Cp=0 \quad \text{(условие параллельности)} \qquad (4.2)$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости совпадает с условием параллельности векторов $\bar{n}$ и $\bar{s}$, т.е. будет

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad \text{(условие перпендикулярности)} \qquad (4.3)$$

Координаты точки пересечения прямой линии (1.29) с плоскостью (1.24) должны одновременно удовлетворять уравнениям (1.29) и (1.24), а поэтому для их определения нужно совместно решить эти уравнения, считая *x, y, z* за неизвестные. Подставляя значения *x, y, z* из уравнений (1.29) в уравнение (1.24), получаем:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+(Am+Bn+Cp)t=0,$$

откуда находим

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$$

если $\qquad Am+Bn+Cp\neq 0.$

Внося найденное значение $t$ в формулы (1.29), получим координаты искомой точки пересечения прямой линии (1.29) с плоскостью (1.24). В случае $Am+Bn+Cp=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ прямая параллельна плоскости. Наконец, если $Am+Bn+Cp\neq 0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая (1.29) лежит на плоскости (1.24).

## §5. Прямая линия на плоскости

Чтобы составить уравнение прямой в декартовых координатах, нужно каким-то образом задать условия, определяющие положение ее относительно выбранной системы координат. Углом наклона прямой к оси OX называется тот угол, на который нужно
повернуть ось OX, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей).

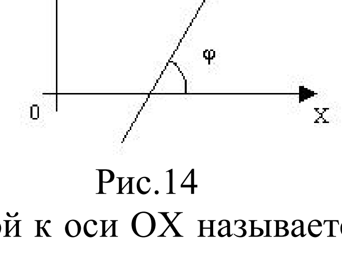


Рис.14

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой.

Положение прямой будет определено, если задать угловой коэффициент и величину отрезка, отсекаемого ею на оси ординат.
Когда точка *M* (рис. 15) движется по прямой, то ее координаты *X, Y* удовлетворяют условию

$$tg\,\varphi = \frac{y-b}{x}$$

отсюда

$$y = kx+b, \qquad (1.36)$$

где $k = tg\,\varphi$.

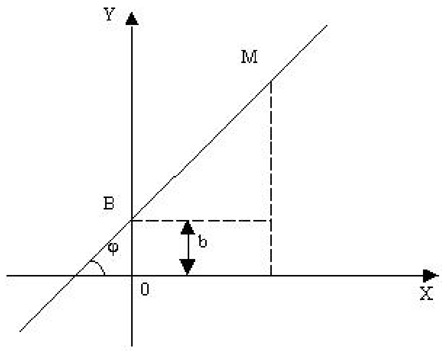

Рис.15

Уравнение прямой вида (1.36) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой.
Уравнение (1.36) получено из предположения, что прямая не параллельна оси ординат. Уясним теперь, какое уравнение будет иметь прямая, параллельная оси OY.
Пусть *a* – абсцисса точки пересечения этой прямой с осью абсцисс (рис. 16).

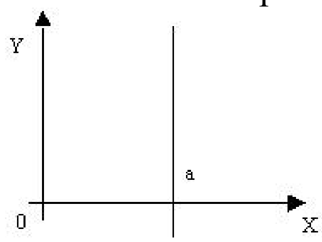

Рис.16

Очевидно, что любая точка прямой имеет абсциссу, равную а; если же точка не лежит на прямой, то ее абсцисса отлична от *a*. Следовательно, эта прямая имеет уравнение

$$x = a \qquad (1.37)$$

Так как уравнения (1.36) и (1.37) являются уравнениями первой степени относительно переменных *x*, *y*, то в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени.
Так как общее уравнение первой степени относительно *x, y*, имеющее вид

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1.38)$$

приводится к виду (1.36), если $B \neq 0$, и к виду (1.37), если $B=0$, то всякое уравнение первой степени относительно текущих координат определяет прямую линию. В соответствии с этим уравнение (1.38) называется общим уравнением прямой.

Положение прямой полностью определяется точкой $M(x_0,y_0)$, принадлежащей этой прямой, и угловым коэффициентом $k$. Уравнение такой прямой будет иметь вид

$y-y_0=k(x-x_0)$ (1.39)

Для определения расстояния от точки $A(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ можно использовать правило: расстояние от данной точки до данной прямой равно абсолютной величине числа, полученного путем подстановки координат данной точки в нормальное уравнение прямой, т.е.

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \tag{1.41}$$

Пусть уравнения $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяют две прямые. Тогда угол $\varphi$ между ними можно вычислить по формуле

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| \tag{1.42}$$

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:

$$k_2 = k_1 \tag{1.43}$$

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение:

$$k_1\cdot k_2=-1$$

или

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \tag{1.44}$$